【補遺】軌跡と領域

Problem 3

aが$-\frac{1}{2} \leq a < 1$の範囲を動く。

このとき、放物線$y = -(x-a)^2 - a^2 + 1$が通過する領域を求め、図示せよ。

〈解答の筋道〉

講義では、順像法について詳しく扱ったので、ここでは逆像法で説明します。逆像法は、条件を満たす文字定数が存在するための条件を考える、というものでした。

点(X, Y)を置き、これが領域内に含まれる条件を考えていきます。

$$Y = -(X-a)^2 - a^2 + 1$$

整理すると、

$$2a^2 - 2Xa + X^2 + Y - 1 = 0 \quad \cdots\cdots（＊）$$

（＊）が$-\frac{1}{2} \leq a < 1$に少なくとも 1 つ解を持つようにしたいのです。場合分けして考えます。左辺を$f(a)$とすると、$f(a) = 0$が――

（ⅰ）$a = -\frac{1}{2}$を解に持つとき

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{すなわち} \quad X^2 + X + Y - \frac{1}{2} = 0$$

（ⅱ）$-\frac{1}{2} < a < 1$に解を 1 つ持ち、他の解が$a \neq 1$のとき

グラフをイメージしてください。$f(-\frac{1}{2})$と$f(1)$の正負が一致しないことを理解してください。

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)f(1) < 0$$

（ⅲ）$-\frac{1}{2} < a < 1$に解を 1 つ持ち、他の解が$a = 1$のとき

$$f(1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad X^2 - 2X + Y + 1 = 0$$

であり、このときの他の解は、（＊）について解と係数の関係から、$a = X - 1$でありますから、

$$-\frac{1}{2} < X - 1 < 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2} < X < 2$$

以上をまとめますと、

$$X^2 - 2X + Y + 1 = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{2} < X < 2$$

（ⅳ）$-\frac{1}{2} < a < 1$に解を 2 つ持つとき

（＊）の方程式について、$b = f(a)$という関数を考えますと、軸は$a = \frac{X}{2}$であります。だとすれば、軸が$-\frac{1}{2} < a < 1$の中に収まっていないといけませんね。

また、（＊）の判別式をDとすれば、$D \geq 0$ですね。つまり、まとめると

$$-\frac{1}{2} < \frac{X}{2} < 1, D \geq 0, f\left(-\frac{1}{2}\right) > 0, f(1) > 0$$

ですね。以上（ⅰ）～（ⅳ）をまとめて、(X, Y)を(x, y)に置き換えれば、答えになります。

最初に題意を言い換えるところが逆像法のポイントになります。

Problem 4

tが$0 \leq t \leq 1$の範囲を動く。

直線$y = 3t^2x - 2t^3$の通り得る点の存在範囲を求め、図示せよ。

〈逆像法〉

逆像法で考えてみましょう。

点(X, Y)が領域内に含まれる条件を考えていきます。

$Y = 3Xt^2 - 2t^3$

$f(t) = 2t^3 - 3Xt^2 + Y = 0$と置くとき、$f(t) = 0$が$0 \leq t \leq 1$の範囲に少なくとも 1 つの実数解を持つようにしたいのです。tで微分します。

$f'(t) = 6t^2 - 6Xt = 6t(t - X)$

さて、場合分けしていきましょう。常にグラフをイメージしながら理解してください。手元に紙があれば、逐一グラフの概形を描いてみてほしいと思います。

（ⅰ）$X \leq 0$のとき

$f(t)$は$0 \leq t \leq 1$においては単調に増加しているはずです。求める条件は

$f(0) \leq 0, f(1) \geq 1$　すなわち　$3X - 2 \leq Y \leq 0$

（ⅱ）$0 < X < 1$のとき

まず、$f(X) \leq 0$でなければなりません。

そして、$f(0) \geq 0$又は$f(1) \geq 0$であります。よって、求める条件は

$Y \leq X^3, Y \geq 0$又は$Y \geq 3X - 2$

（ⅲ）$X \geq 1$のとき

$f(t)$は$0 \leq t \leq 1$においては単調に減少しているはずです。求める条件は

$f(0) \geq 0, f(1) \leq 0$　すなわち　$0 \leq Y \leq 3X - 2$

あとは(X, Y)を(x, y)に置き換えていただければ、領域が求まると思います。

逆像法は、やはり最初の言い換えが肝心です。

〈順像法〉

順像法だとどうなるでしょうか。

$y=f(t)=-2t^3+3xt^2$として、以下xを固定して考えます（定数と見る、ということです。）。tを$0\leq t\leq 1$の範囲で動かしてyの変域を調べていきます。tで微分します。

$$f'(t)=6t^2-6xt=6t(t-x)$$

さて、場合分けをしていきましょう。適宜、増減表を書いておくことを勧めます。

（ⅰ）$x\leq 0$のとき

$f(t)$は$0\leq t\leq 1$においては単調に減少しているはずです。yの変域は

$$f(1)\leq y\leq f(0)$$

（ⅱ）$0<x<1$のとき

yの変域は

・$0<x\leq\frac{2}{3}$のとき　$f(1)\leq y\leq f(x)$

・$\frac{2}{3}<x<1$のとき　$f(0)\leq y\leq f(x)$

（ⅲ）$x\geq 1$のとき

$f(t)$は$0\leq t\leq 1$においては単調に増加しているはずです。yの変域

$$f(0)\leq y\leq f(1)$$

これをまとめれば領域が出ると思います。

講義でも説明したとおり、包絡線はいったん無視して構いません。

今日は難しいテーマなのに、時間的制約を意識しすぎてしまい、やや走り気味の講義でわかりにくかったかもしれません。すみませんでした。丁寧な復習をして、知識を定着させてほしいと思います。